Proper actions of $SL(2, \mathbb{R})$ on semisimple symmetric spaces (Homogeneous spaces and non-commutative harmonic analysis)

AUTHOR(S):

奥田, 隆幸

数理解析研究所講究録
第 1722 巻 2010 年 9-19

Proper actions of $SL(2,\mathbb{R})$ on semisimple symmetric spaces

東京大学大学院数理科学研究科 奥田 隆幸 (Takayuki Okuda)
Graduate School of Mathematical Science, The University of Tokyo

1 序

局所対称空間の大域構造についての以下の問題を考える.

問題 1.1 (See [13]). モデル空間として対称空間 M_0 を固定する. このとき, M_0 と局所同型となる完備なアファイン多様体 M の基本群として, どのような群が現れるか?

この場合には, モデル空間 M_0 は単連結であるとして構わない. É.Cartan の定理により, 対称空間 M_0 は, その変換群を G としたとき, 等質空間 G/H として表せる. このとき, M_0 と局所同型な局所対称空間 M に対して, M の基本群 $\pi_1(M)$ は G の離散部分群であって, $M_0 = G/H$ に固有不連続に作用する. 逆に, G の離散部分群 Γ が $M_0 = G/H$ に固有不連続に作用しているとき (このような離散群は不連続群と呼ばれる), Clifford–Klein 形 $M := \Gamma\backslash G/H$ は M_0 と局所同相な局所対称空間となる.

このことを踏まえると, 問題 1.1 は次のような問題として考えてもよい.

問題 1.2. 対称対 (G,H) を固定する. G/H の不連続群としてどのような群が現れるか?

ここで (G,H) に対して, H がコンパクトである場合には, 任意の G の離散部分群 Γ は G/H に固有不連続に作用する. 従って, この場合には, 問題 1.2 は, G の離散部分群の分類の問題 (H とは無関係) であるといえる. この報告において興味があるのは, H が非コンパクトの場合である. この場合には, G の離散部分群であっても, G/H に固有不連続に作用するとは限らない. 例えば, ローレンツ対称空間 $SO(n+1,1)/SO(n,1)$ について, $SO(n+1,1)$ の任意の無限離散部分群は固有不連続に作用しないことが知られている (Calabi–Markus 現象 [5]).

H が非コンパクトの場合の体系的な研究は, 80 年代後半の小林 [9, 10, 11] の仕事に始まり, [16, 19, 21, 23, 27] などの結果がある. この話題についてのまとめとしては [14, 15, 22] などが挙げられる.

この報告では, 半単純対称空間 G/H に対して, $SL(2,\mathbb{R})$ が G を通じて固有に作用し得るための必要十分条件を述べる. またその結果として, 曲面群 (i.e. 種数 $g \geq 2$ の閉リーマン面の基本群) と同型な群を不連続群として持つような半単純対称空間 G/H の分類を行う.

2 主定理と分類

次のような設定を考える.

設定 2.1. G を連結半単純 *Lie* 群, σ を G の *Lie* 群としての対合, H を $G^\sigma := \{g \in G \mid \sigma g = g\}$ の開部分群とする.

この設定において, 等質空間 G/H は, G/H の自然なアファイン接続について対称空間となる. 以降, G, H の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ と書く. $\sigma : G \to G$ の微分は, $\mathfrak{g}$ の対合として作用するが, これも同じ記号 σ で表す. また, $\mathfrak{q} := \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma X = -X\}$ とし, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の c-dual を $\mathfrak{g}^c := \mathfrak{h} \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{q}$ と定義する. $\mathfrak{g}$ の複素化を $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ と書けば, $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^c$ は共に $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の実形である.

以下の定理がこの報告の主定理である.

主定理. 設定 2.1 において, 対称対 (G, H) に対する次の条件は互いに同値である :

(i) *Lie* 群の準同型 $\Phi : SL(2,\mathbb{R}) \to G$ であって, Φ を通じた $SL(2,\mathbb{R})$ の G/H への作用が固有であるものが存在する.

(ii) 任意の $g \geq 2$ に対して, 種数 g の曲面群と同型な G の離散部分群であって, 対称空間 G/H の不連続群となるものが存在する.

(iii) 対称空間 G/H の不連続群 Γ であって, "ほぼ可換"(*i.e.* 指数有限の可換な部分群を持つ) ではないものが存在する.

(iv) G の冪単行列が生成する自由群であって, 対称空間 G/H の不連続群となるものが存在する.

(v) $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ による冪零軌道 $\mathcal{O}$ であって, $\mathfrak{g}$ と交わり, $\mathfrak{g}^c$ とは交わらないものが存在する.

この定理の証明については, §3 でそのアイディアを述べる.

主定理は非可換群 $SL(2,\mathbb{R})$ の固有作用についての命題であるが, これと対応する結果として, 可換群 $\mathbb{R}$ の固有作用についての次の Fact が成り立つ.

Fact 2.2. 設定 2.1 において, 対称対 (G,H) についての次の条件は互いに同値である：

(1) *Lie* 群の準同型 $\rho:\mathbb{R}\to G$ であって, ρ を通じた $\mathbb{R}$ の G/H への作用が固有であるものが存在する.

(2) 可換群 $\mathbb{Z}$ に対して, $\mathbb{Z}$ と同型な G の離散部分群であって, 対称空間 G/H の不連続群となるものが存在する.

(3) 対称空間 G/H の不連続群として, 無限群が存在する.

(4) G の双曲的な元が生成する自由群であって, 対称空間 G/H の不連続群となるものが存在する.

(5) $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の $\operatorname{Int}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ による双曲型軌道 $\mathcal{O}_{hyp}$ であって, $\mathfrak{g}$ と交わり, $\mathfrak{g}^c$ とは交わらないものが存在する.

(6) $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} G > \operatorname{rank}_{\mathbb{R}} H$.

ここで, $X\in\mathfrak{g}$ [*resp.* $x\in G$] が双曲的であることを, $\operatorname{ad}(X)\in\operatorname{End}(\mathfrak{g})$ [*resp.* $\operatorname{Ad}(x)\in GL(\mathfrak{g})$] が実対角化可能であることとして定義している.

この Fact において (1), (2), (3), (4), (6) の同値性については, 小林 [9] において, より一般の設定で証明されている. (1) と (5) の同値性については, 主定理の証明と似た議論で証明される. また, Fact 2.2 における実ランクの条件 (6) は Calabi–Markus 現象 (cf. 条件 (3)) の判定条件を与えている.

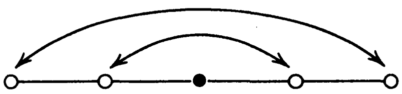
対称空間 G/H が $\mathbb{R}$ の固有作用を持つか否かについては, Fact 2.2 の (6) を検証すればよい. ここでは, G/H が $SL(2,\mathbb{R})$ の固有作用を持つか持たないかについて, 主定理の (v) を検証することによる判定法を紹介する (see 定理 2.6 below). そのためにまず, 冪零軌道の構造についての Fact 2.5 を述べる.

一般に, 複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ とその実形 $\mathfrak{g}$ を考える. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ についての被約ルート系から定義される Dynkin 図形に対して, その各頂点に $0,1,2$ のいずれかの数を重みとして対応させたものを, 重みつき Dynkin 図形と呼ぶ. Jacobson–Morozov の定理, Kostant [17], Malcev [20] らの結果により, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の $\operatorname{Int}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ による冪零軌道には, それぞれに互いに異なる重みつき Dynkin 図形が対応する. また, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の被約ルート系から $\mathfrak{g}$ の制限ルート系への制限を表した図形として, 佐武図形が定義される. 佐武図形についての詳しい定義はここでは述べない (詳しくは [1, 8, 24] などを参照) が, 図形としては, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Dynkin 図形のい

くつかの頂点を黒く塗り, 残った頂点同士のいくつかのペアを矢印で結んだものである.

定義 2.3. 複素半単純 *Lie* 環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ と, その実形 $\mathfrak{g}$ について考える. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ のある重みつき *Dynkin* 図形 D を固定し, S を $\mathfrak{g}$ の佐武図形とする. このとき, D が S に *match* するということを, S の黒い頂点における D での重みは全て零であって, S で矢印で結ばれている任意の二頂点における D での重みは等しいこととして定義する.

例 2.4. 例として, 複素単純 *Lie* 環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(6,\mathbb{C})$ と, その実形 $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(4,2)$ について考える. $\mathfrak{su}(4,2)$ の佐武図形 S は,



で与えられる. ここで, $\mathfrak{sl}(6,\mathbb{C})$ の重みつき *Dynkin* 図形 D_1, D_2 を:

$$D_1 := \overset{2}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\overset{1}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\overset{0}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\overset{1}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\overset{2}{\circ}$$

$$D_2 := \overset{2}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\overset{2}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\overset{2}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\overset{2}{\circ}\!-\!\!-\!\!-\overset{2}{\circ}$$

としてとったとき, 定義 2.3 によると, D_1 は S と *match* するが, D_2 は S と *match* しない.

関口 [25] と Djokovic [6] の結果を用いると次の Fact が成り立つ.

Fact 2.5. 複素半単純 *Lie* 環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ と, その実形 $\mathfrak{g}$ について考える. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ による冪零軌道 $\mathcal{O}$ について, $\mathcal{O}$ が $\mathfrak{g}$ と交わることと, $\mathcal{O}$ に対応する重みつき *Dynkin* 図形が $\mathfrak{g}$ の佐武図形 S と *match* することは同値である.

従って, 設定 2.1 において, Fact 2.5 を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の二つの実形 $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^c$ に適用すれば, 次の定理が得られたことになる.

定理 2.6. 設定 *2.1* において, 主定理における対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ についての条件 (v) と以下の条件は同値である.

(vi) $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ による冪零軌道 $\mathcal{O}$ であって, $\mathcal{O}$ に対応する重みつき *Dynkin* 図形が $\mathfrak{g}$ の佐武図形とは *match* していて $\mathfrak{g}^c$ の佐武図形とは *match* しない, というものが存在する.

複素半単純 Lie 環の冪零軌道の分類は Dynkin–Kostant [7, 17] および Bala–Carter [2] によって行われている．また，半単純対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ は Berger [4] によって分類されている．従って，定理 2.6 を用いれば，主定理の条件を満たす対称対 (G, H) の分類ができる．次の定理は，G が単純である場合について，Fact の条件を満たすが，主定理の条件を満たさないような対称対 (G, H) の分類である．

定理 2.7. 設定 2.1 において，G を単純 *Lie* 群であるとする．このとき，対称空間 G/H が，$\mathbb{Z}$ と同型な不連続群を持つが曲面群と同型な不連続群は持たないということと，対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ が以下の表に現れることは同値である：

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$
$\mathfrak{sl}(2k, \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(k, \mathbb{R})$
$\mathfrak{sl}(2k, \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(k, k)$
$\mathfrak{su}^*(4m+2)$	$\mathfrak{sp}(m+1, m)$
$\mathfrak{su}^*(4m)$	$\mathfrak{sp}(m, m)$
$\mathfrak{su}^*(2k)$	$\mathfrak{so}^*(2k)$
$\mathfrak{so}(2k+1, 2k+1)$	$\mathfrak{so}(i+1, i) \oplus \mathfrak{so}(j, j+1)$ $(i + j = 2k)$
$\mathfrak{e}_{6(6)}$	$\mathfrak{f}_{4(4)}$
$\mathfrak{e}_{6(6)}$	$\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$
$\mathfrak{e}_{6(-26)}$	$\mathfrak{sp}(3, 1)$
$\mathfrak{e}_{6(-26)}$	$\mathfrak{f}_{4(-20)}$
$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$
$\mathfrak{sl}(2k, \mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(k, \mathbb{C})$
$\mathfrak{sl}(2k, \mathbb{C})$	$\mathfrak{su}(k, k)$
$\mathfrak{so}(4m+2, \mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(i, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(j, \mathbb{C})$ $(i + j = 4n + 2,\ i, j \text{ are odd})$
$\mathfrak{so}(4m+2, \mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(2m+2, 2m)$
$\mathfrak{e}_{6,\mathbb{C}}$	$\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$
$\mathfrak{e}_{6,\mathbb{C}}$	$\mathfrak{f}_{4,\mathbb{C}}$
$\mathfrak{e}_{6,\mathbb{C}}$	$\mathfrak{e}_{6(2)}$

特に, G が線形単純 Lie 群であるような対称対 (G,H) が, $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}\,\mathfrak{g} > \mathrm{rank}_{\mathbb{R}}\,\mathfrak{h}$ (cf. Fact 2.2 (6)) であって, $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ が上の表に現れなければ, 対称空間 G/H は曲面群と同型な不連続群を持つ.

Remark 2.8. この表において, $\mathfrak{g}$ も $\mathfrak{h}$ も複素 *Lie* 環であるものについては, 手塚 [*26*] において, $\mathbb{R}$ の固有作用を持つが $SL(2,\mathbb{R})$ の固有作用を持たない対称対として, 既に知られていたものである.

3 主定理の証明のアイディア

この章では, 主定理の証明のアイディアを述べる. 特に主定理の鍵となるのは, (i) と (v) の同値性であるから, この証明のアイディアについて詳しく紹介する.

その他の同値性の証明についても簡単に述べておくと, (i) $\Rightarrow$ (ii) や (ii) $\Rightarrow$ (iii) は, 曲面群の持ち上げについての結果 (see [18]) などを用いて証明される . また, (i) と (iv) の同値性は, 既に小林 [12] において証明されている. (iii) と (v) の同値性の証明については, Benoist [3] の結果を用いて行う. 以降, (i) と (v) の同値性の証明について述べる.

主定理の (i) $\Leftrightarrow$ (v) **の証明のアイディア**. まず, 設定 2.1 において, 主定理の条件 (i) は, Lie 群の準同型の同値類の集合

$$\begin{aligned} A := \{\, &\text{Lie group homomorphisms } \Phi : SL(2,\mathbb{R}) \to G \\ &\qquad \text{such that } SL(2,\mathbb{R}) \text{ acts properly on } G/H \text{ via } \Phi \,\}/\sim \end{aligned}$$

が空でないという条件である (ただし, 二つの準同型 $\Phi, \Phi' : SL(2,\mathbb{R}) \to G$ に対して, ある $g \in G$ が存在して,

$$g \cdot \Phi(x) \cdot g^{-1} = \Phi'(x) \quad ({}^{\forall}x \in SL(2,\mathbb{R}))$$

となるとき $\Phi \sim \Phi'$ であるとしている). また主定理の条件 (v) については, 冪零軌道の集合

$$B := \{\, \text{Nilpotent orbits } \mathcal{O} \text{ of } \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ in } \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ which meets } \mathfrak{g} \text{ but not } \mathfrak{g}^c \,\}$$

が空でないという条件である. 条件 (i) と 条件 (v) の同値性は, 集合 A から集合 B への全射写像を構成することで証明される.

Step 1(H **とは無関係に成り立つ対応):**

以下の三つの写像について詳しく見る (ただし以下の集合における各写像 Φ, ϕ, ψ は, Lie 群または Lie 環の準同型を表していることとする).

$$\{\ \Phi : SL(2,\mathbb{R}) \to G\,\}/\!\sim$$
$$\xrightarrow{\text{微分}} \{\,\phi : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}\,\}/\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$$
$$\xrightarrow{\text{複素化}} \{\,\psi : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid {}^{\exists}g \in \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ such that } g \cdot \psi(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})) \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\ \}/\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$$
$$\xrightarrow{\text{冪零元だけ見る}} \{\,\text{Nilotent orbits } \mathcal{O} \text{ of } \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ in } \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ which meets } \mathfrak{g}\,\}$$

一つ目の写像の定義: Lie 群の準同型 $\Phi : SL(2,\mathbb{R}) \to G$ の G による同値類に対して, その微分 $d\Phi : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}$ の $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ による同値類を対応させる.

二つ目の写像の定義: Lie 環の準同型 $\phi : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}$ の $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}$ による同値類に対して, その複素化 $\phi_{\mathbb{C}} : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ による同値類を対応させる.

三つ目の写像の定義: 複素 Lie 環の準同型 $\psi : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ による同値類に対して, 冪零軌道

$$\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \cdot \psi(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$$

を対応させる.

ここで, $SL(2,\mathbb{R})$ の複素化 $SL(2,\mathbb{C})$ が単連結であることと, G が線形半単純である (G の複素化が存在する) ことを用いると, 一つ目の写像は一対一対応であることが証明できる. 二つ目の写像は, その定義から全射である. 最後に三つ目の写像について考えたい. 関口 [25, Proposition 1.11] から直ちに, 次の Fact が成り立つ.

Fact 3.1. 複素半単純 *Lie* 環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ とその実形 $\mathfrak{g}$ について, *Lie* 環の準同型 $\psi : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ に対して, 次の三つの条件は同値である.

(a) ある $g \in \mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ が存在して, $g \cdot \psi(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})) \subset \mathfrak{g}$ となる.

(b) $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の冪零軌道 $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \cdot \psi(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$ が $\mathfrak{g}$ と交わる.

(c) $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の双曲型軌道 $\mathrm{Int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \cdot \psi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix})$ が $\mathfrak{g}$ と交わる.

この Fact と Jacobson–Morozov の定理から, 三つ目の写像が一対一対応であることが証明される. これで, Lie 群の準同型の集合

$$\{\ \text{Lie group homomorphisms } \Phi : SL(2,\mathbb{R}) \to G\,\}/\!\sim$$

から, 冪零軌道の集合

$$\{\text{Nilpotent orbits } \mathcal{O} \text{ of } \operatorname{Int}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ in } \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\}$$

への全射写像が定義された.

Remark 3.2. 二つ目の写像は一般には単射にはならないが, 各点の逆像は高々有限である. このことは, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の $\operatorname{Int}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ による冪零軌道 $\mathcal{O}$ が $\mathfrak{g}$ と交わるとき, $\mathcal{O}\cap\mathfrak{g}$ が $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ による $\mathfrak{g}$ の冪零軌道として有限個に分かれるということと関係している.

Step 2(H と関連する対応):
先に定義した集合 A は

$$\{\text{ Lie group homomorphisms } \Phi : SL(2,\mathbb{R}) \to G\}/\sim$$

の部分集合であり, 集合 B は

$$\{\text{Nilpotent orbits } \mathcal{O} \text{ of } \operatorname{Int}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ in } \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\}$$

の部分集合である. **Step 1** で定義した写像を A に制限すると, B への全射となることを示そう.

Step 2-1: まず, 小林 [9] の結果より, 次の補題が証明できる:

補題 3.3. 設定 2.1 において, *Lie* 群の準同型 $\Phi : SL(2,\mathbb{R}) \to G$ と, その微分 $d\Phi : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}$ を考える. このとき, Φ を通じた $SL(2,\mathbb{R})$ の G/H への作用が固有であることと, 双曲型軌道

$$\operatorname{Int}\mathfrak{g}\cdot d\Phi(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}) \subset \mathfrak{g}$$

が, $\mathfrak{h}$ と交わらないことは同値である.

これより, **Step 1** の一つ目の写像を A に制限すると, Lie 環の準同型の同値類の集合

$$A' := \{\phi : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to \mathfrak{g} \mid \operatorname{Int}\mathfrak{g}\cdot\phi(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}) \text{ does not meet } \mathfrak{h}\}/\operatorname{Int}\mathfrak{g}$$

への一対一対応を与えることが分かる.

Step 2-2: Lie 環の構造論とルート系についての議論を行うことで, 次の双曲型軌道についての命題が得られる.

命題 3.4. 設定 2.1 において, 任意の双曲的な元 $X \in \mathfrak{g}$ に対して, $\mathfrak{g}$ の双曲型軌道 $(\operatorname{Int}\mathfrak{g})\cdot X$ が $\mathfrak{h}$ と交わることと, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の双曲型軌道 $(\operatorname{Int}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\cdot X$ が $\mathfrak{g}^c$ と交わることは同値である.

この命題から, **Step 1** の二つ目の写像を A' に制限すると, 複素 Lie 環の準同型の同値類の集合

$$A'' := \{\, \psi : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid {}^{\exists}g \in \operatorname{Int}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ such that } g \cdot \psi(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})) \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \\ \text{and } \operatorname{Int}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \cdot \phi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}) \text{ does not meet } \mathfrak{g}^c \,\}/\operatorname{Int}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$$

への全射を与えることが分かる.

Step 2-3: Fact 3.1 を, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の実形 $\mathfrak{g}^c$ に適用すると, A'' は集合として,

$$\{\, \psi : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid {}^{\exists}g \in \operatorname{Int}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ such that } g \cdot \psi(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})) \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \\ \text{and } \operatorname{Int}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \cdot \phi(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \text{ does not meet } \mathfrak{g}^c \,\}/\operatorname{Int}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$$

と等しいことが分かる. 従って, **Step 1** の三つ目の一対一対応を A'' に制限すると,

$$B = \{\, \text{Nilpotent orbits } \mathcal{O} \text{ of } \operatorname{Int}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ in } \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \text{ which meets } \mathfrak{g} \text{ but not } \mathfrak{g}^c \,\}$$

への一対一対応を与えることが分かった.

これで, 集合 A から集合 B への全射が構成できたので, 特に A が非空であること (主定理の条件 (i)) と, B が非空であること (主定理の条件 (v)) は同値である. □

参考文献

[1] S. Araki. On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces. *J. Math. Osaka City Univ.*, 13:1–34, 1962.

[2] P. Bala and R. W. Carter. Classes of unipotent elements in simple algebraic groups. I, II. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 79:401–425, 1976; *bid* 80:1-17,1976.

[3] Y. Benoist. Actions propres sur les espaces homogènes réductifs. *Ann. of Math. (2)*, 144:315–347, 1996.

[4] M. Berger. Les espaces symétriques noncompacts. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 74:85–177, 1957.

[5] E. Calabi and L. Markus. Relativistic space forms. *Ann. of Math. (2)*, 75:63–76, 1962.

[6] D. Ž. Djoković. Classification of **Z**-graded real semisimple Lie algebras. *J. Algebra*, 76:367–382, 1982.

[7] E. B. Dynkin. Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras. *Mat. Sbornik N.S.*, 30(72):349–462 (3 plates), 1952.

[8] A. G. Helminck. Algebraic groups with a commuting pair of involutions and semisimple symmetric spaces. *Adv. in Math.*, 71:21–91, 1988.

[9] T. Kobayashi. Proper action on a homogeneous space of reductive type. *Math. Ann.*, 285:249–263, 1989.

[10] T. Kobayashi. Discontinuous groups acting on homogeneous spaces of reductive type. In *Representation theory of Lie groups and Lie algebras (Fuji-Kawaguchiko, 1990)*, pages 59–75. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.

[11] T. Kobayashi. A necessary condition for the existence of compact Clifford-Klein forms of homogeneous spaces of reductive type. *Duke Math. J.*, 67:653–664, 1992.

[12] T. Kobayashi. On discontinuous groups acting on homogeneous spaces with noncompact isotropy subgroups. *J. Geom. Phys.*, 12:133–144, 1993.

[13] T. Kobayashi. Discontinuous groups for non-Riemannian homogeneous spaces. In *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, pages 723–747. Springer, Berlin, 2001.

[14] T. Kobayashi. Introduction to actions of discrete groups on pseudo-Riemannian homogeneous manifolds. *Acta Appl. Math.*, 73:115–131, 2002. The 2000 Twente Conference on Lie Groups (Enschede).

[15] T. Kobayashi. On discontinuous group actions on non-Riemannian homogeneous spaces [translation of Sūgaku **57** (2005), 267–281]. *Sugaku Expositions*, 22:1–19, 2009. Sugaku Expositions.

[16] T. Kobayashi and T. Yoshino. Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces—revisited. *Pure Appl. Math. Q.*, 1:591–663, 2005.

[17] B. Kostant. The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group. *Amer. J. Math.*, 81:973–1032, 1959.

[18] I. Kra. On lifting Kleinian groups to $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$. In *Differential geometry and complex analysis*, pages 181–193. Springer, Berlin, 1985.

[19] F. Labourie and R. J. Zimmer. On the non-existence of cocompact lattices for $\mathrm{SL}(n)/\mathrm{SL}(m)$. *Math. Res. Lett.*, 2:75–77, 1995.

[20] A. I. Malcev. On semi-simple subgroups of Lie groups. *Amer. Math. Soc. Translation*, 1950(33):43, 1950.

[21] G. A. Margulis. Existence of compact quotients of homogeneous spaces, measur-

ably proper actions, and decay of matrix coefficients. *Bull. Soc. Math. France*, 125(3):447–456, 1997.

[22] G. A. Margulis. Problems and conjectures in rigidity theory. In *Mathematics: frontiers and perspectives*, pages 161–174. Amer. Math. Soc., 2000.

[23] H. Oh and D. Witte. Compact Clifford-Klein forms of homogeneous spaces of $\mathrm{SO}(2,n)$. *Geom. Dedicata*, 89:25–57, 2002.

[24] I. Satake. On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces. *Ann. of Math. (2)*, 71:77–110, 1960.

[25] J. Sekiguchi. Remarks on real nilpotent orbits of a symmetric pair. *J. Math. Soc. Japan*, 39:127–138, 1987.

[26] K. Teduka. Proper actions of $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ on irreducible complex symmetric spaces. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 84:107–111, 2008.

[27] R. J. Zimmer. Discrete groups and non-Riemannian homogeneous spaces. *J. Amer. Math. Soc.*, 7:159–168, 1994.